ENSA-ALHOCEIMA	ANALYSE 4
CP II.	SEMESTRE 2
	F.MORADI

Exercice 5 :

On a $f(x,y) = \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}$ *avec* $(x,y) \in ([0,+\infty[)^2$

1) *Soit* $(x,y) \in ([0,+\infty[)^2$ *, posons* $g(y) = 1 + xy.$

  i. *g est une fonction affine dérivable sur* $[0,+\infty[$
  ii. $g([0,+\infty[) \subset [1,+\infty[$
  iii. *La fonction logarithme est dérivable sur* $[1,+\infty[$

Donc les fonctions $y \longmapsto ln(1 + xy)$ *et* $y \longmapsto \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}$ *sont dérivables sur* $[0,+\infty[$.

Par suite, f est dérivable par rapport à y sur $[0,+\infty[$ *et*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)}$$

2) *Posons* $I(y) = \int_0^y f(x,y)\,dx$

1) *Comme les fonctions* $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ *et* $(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont continues sur* $([0,+\infty[)^2$ *et la fonction* $y \longmapsto y$ *est de classe* C^1 *sur* $[0,+\infty[$ *alors, I est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et on a*

$$I'(y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(y,y) * 1 - f(0,y) * 0$$
$$= \int_0^y \frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)}dx + \frac{ln(1 + y^2)}{1 + y^2}$$

2) *Montrons que :*

$$I'(y) = \frac{ln(1 + y^2)}{2(1 + y^2)} + \frac{yArctany}{(1 + y^2)}$$

Calculons $\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx$ *en décomposant la fonction en fractions rationnelles.*

Cherchons α, β *et* γ *tels que:*

$$\frac{x}{(1 + x^2)(1 + xy)} = \frac{\alpha x + \beta}{(1 + x^2)} + \frac{\gamma}{(1 + xy)}$$

On trouve le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta y = 1 \\ \alpha y + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + y\beta = 1 \\ y\alpha - \beta = 0 \\ \gamma = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + y\beta = 1 \\ \beta = y\alpha \\ \gamma = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1 + y^2) = 1 \\ \beta = y\alpha \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

On obtient donc:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{(1+y^2)} \\ \beta = \dfrac{y}{(1+y^2)} \\ \gamma = -\dfrac{y}{(1+y^2)} \end{cases}$$

Et par suite,

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}.$$

Finalement,

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx$$

$$= \frac{1}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)}dx + \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)}dx - \frac{y}{(1+y^2)}\int_0^y \frac{1}{(1+xy)}dx.$$

D'où,

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx$$

$$= \frac{1}{(1+y^2)}\left[\frac{1}{2}ln(1+x^2)\right]_0^y + \frac{y}{(1+y^2)}[Arctanx]_0^y - \frac{1}{(1+y^2)}[ln(1+xy)]_0^y$$

$$= \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)} - \frac{ln(1+y^2)}{(1+y^2)}$$

Ceci est équivalent à:

$$\int_0^y \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx + \frac{ln(1+y^2)}{1+y^2} = \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)}$$

On en déduit donc,

$$I'(y) = \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)}$$

3) *Calculons* $\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt$, *en utilisant une intégration par parties:*

Posons $\begin{cases} u(t) = Arctant \\ v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{(1+t^2)} \\ v(t) = \frac{1}{2}ln(1+t^2) \end{cases}$

Par suite,

$$\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}ln(1+t^2)Arctant\right]_0^y - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{ln(1+t^2)}{(1+t^2)}dt$$

$$= \frac{1}{2} Arctany * ln(1 + y^2) - \frac{1}{2} \int_0^y \frac{ln(1 + t^2)}{(1 + t^2)} dt$$

4) D'après la question précédente, on a:

$$\int_0^y \frac{tArctant}{1 + t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^y \frac{ln(1 + t^2)}{(1 + t^2)} dt = \frac{1}{2} Arctany * ln(1 + y^2)$$

D'où,

$$I(y) = \int_0^y I'(t)\, dt = \frac{1}{2} Arctany * ln(1 + y^2)$$

5) On en déduit donc que,

$$\int_0^1 \frac{ln(1 + x)}{1 + x^2} dx = I(1) = \frac{1}{2} Arctan1 * ln(2) = \frac{\pi}{8} ln(2)$$

Exercice 6 :

Posons: $h(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ $\quad$ $pour\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$.

1) Comme h est le produit et le composé de fonctions usuelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors, h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Par suite, h est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$ et on a:

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$.

D'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.

2) On a $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [Arctant]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Déterminons $lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $lim_{x\to-\infty} f(x)$

Pour $x \geq 0$ on a $\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$ $\quad \Longrightarrow |f(x)| \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x}$.

Or, $lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, par suite, $lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'une autre part, pour $x \leq 0$ on a $\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$ $\quad \Longrightarrow f(x) \geq \frac{\pi}{4} e^{-x}$.

Or, $lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, par suite, $lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3) Posons $u(x) = x^2$, on a donc $g(x) = f\big(u(x)\big)$

a- La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et sa dérivée est donnée par:

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big).u'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt.$$

En utilisant le changement de variables $u = xt$, obtient

$du = xdt$ *et* $\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = x \end{cases}$

Par suite, $x\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt = \int_0^x e^{-u^2}du.$

Finalement,

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

b- Posons $v(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ *et* $\alpha(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$

il est clair que v est dérivable sur $\mathbb{R}$ *puisque la fonction* $t \longmapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*. De plus,* $v'(x) = e^{-x^2}$ *et*

$$\alpha'(x) = g'(x) + 2v(x)v'(x) = g'(x) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

D'après ce qui précède,

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \alpha'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}:\ \alpha(x) = constante$$

Or $\alpha(0) = g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$*, d'où,*

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}:\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

c- Par passage à la limite, on trouve:

$$lim_{x\to+\infty}\left(g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}$$

Et comme $lim_{x\to+\infty} g(x) = lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*, alors*

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On sait que $\forall t \in \mathbb{R}:\ e^{-t^2} \geq 0$*, ce qui nous assure que* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \geq 0$ *et par suite*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remarque:

Cet exercice nous propose une méthode pour montrer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$